OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 15 februarie 2015

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi A, B două submulţimi nevide ale lui G.

Considerăm mulţimea $A/B=\{ab^{-1} \mid a\in A,\ b\in B\}$ (am notat cu b^{-1} simetricul lui b în grupul G).

a) **(3p)** Dacă G este grup abelian iar A şi B sunt subgrupuri ale sale, demonstraţi că A/B este subgrup în G.

b) **(4p)** În grupul $(\mathbb{Z}_{2015},+)$ considerăm mulţimile $A=\{\hat{a}\in\mathbb{Z}_{2015} \mid a \text{ se divide cu } 13\}$ şi $B=\{\hat{b}\in\mathbb{Z}_{2015} \mid b \text{ se divide cu } 31\}$. Determinaţi mulţimea A/B.

Dan Popescu, Vladimir Cerbu

Soluţie.

a) Dacă $a_1,a_2\in A$ şi $b_1,b_2\in B$ atunci $\left(a_1b_1^{-1}\right)\cdot\left(a_2b_2^{-1}\right)^{-1}=\left(a_1a_2^{-1}\right)\cdot\left(b_1b_2^{-1}\right)^{-1}=a_3b_3^{-1}\in A/B$, deoarece $a_3=a_1a_2^{-1}\in A$ şi $b_3=b_1b_2^{-1}\in B$.

Deci $\forall x,y\in A/B$ avem $xy^{-1}\in A/B$, prin urmare A/B este subgrup în G.

b) Avem $A=\{\widehat{13k} \mid k\in\mathbb{N}, k\le 154\}$, $B=\{\widehat{31k} \mid k\in\mathbb{N}, k\le 64\}$, $A/B=\{a-b \mid a\in A,\ b\in B\}$.

Deoarece $2015=5\cdot 13\cdot 31$ deducem că A şi B sunt subgrupuri ale grupului comutativ $(\mathbb{Z}_{2015},+)$.

Conform punctului a) rezultă că A/B este subgrup în $(\mathbb{Z}_{2015},+)$.

Ţinând cont că $1=13\cdot 12-5\cdot 31$, obţinem $\hat{1}\in A/B$ şi atunci $\hat{1}+\hat{1}\in A/B$, $\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}\in A/B$ etc.

În concluzie, $A/B=\mathbb{Z}_{2015}$.

Barem.

a) $\forall x,y\in A/B$ avem $xy^{-1}\in A/B \Rightarrow A/B$ este subgrup în G	1 p
Demonstrează implicaţia de mai sus	2 p
b) A şi B subgrupuri ale grupului comutativ $(\mathbb{Z}_{2015},+)\Rightarrow A/B$ e subgrup în $(\mathbb{Z}_{2015},+)$	2 p
Finalizare	2 p

2. Demonstraţi că nu există grupuri necomutative $(G,\cdot)$ cu proprietatea că $x^2=e,\ \forall x\in G\setminus Z(G)$.
(Am notat cu *e* elementul neutru al grupului *G* şi cu $Z(G)$ centrul grupului *G*, adică mulţimea elementelor din *G* care comută cu **toate** elementele lui *G*: $Z(G)=\{x\in G \mid xy=yx,\ \forall y\in G\}$)

Gazeta Matematică

Soluţie. Presupunem că există un grup necomutativ $(G,\cdot)$ aşa încât $x^2=e,\ \forall x\in G\setminus Z(G)$.
Fie *x* şi *y* două elemente arbitrare din *G*.

Dacă $x\in Z(G)$ sau $y\in Z(G)$ atunci are loc $xy=yx$

Dacă $x,y\in G\setminus Z(G)$, atunci $x^2=e$ şi $y^2=e$, iar de aici se obţine $x=x^{-1}$ şi $y=y^{-1}$.

Analizăm următoarele două situaţii posibile:

- dacă $xy\in G\setminus Z(G)$ atunci $(xy)^2=e$, deci $xy=(xy)^{-1}$ şi avem succesiv: $yx=y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}=xy$.
- dacă $xy\in Z(G)$, atunci *xy* comută cu *y* adică $xyy=yxy$; simplificând la dreapta obţinem $xy=yx$.

În concluzie, $\forall x,y\in G$ avem $xy=yx$, adică *G* este grup comutativ, absurd!

Barem.

Abordarea prin metoda reducerii la absurd	1 p
Dacă $x\in Z(G)$ sau $y\in Z(G)$ $\Rightarrow xy=yx$	1 p
Dacă $x,y\in G\setminus Z(G)$ şi $xy\in G\setminus Z(G)\Rightarrow xy=yx$	2 p
Dacă $x,y\in G\setminus Z(G)$ şi $xy\in Z(G)\Rightarrow xy=yx$	2 p
Concluzie	1 p

3. a) **(2p)** Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $(f(x))^5+f(x)-x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci funcţia *f* admite primitive.

b) **(5p)** Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $(f(x))^3-3(f(x))^2-x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci funcţia *f* nu admite primitive.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluţie. a) Dacă notăm $g(x)=x^5+x$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, atunci relaţia din enunţ devine $g\circ f=1_{\mathbb{R}}$.
Cum g este bijectivă $\Rightarrow f=g^{-1}\Rightarrow f$ continuă $\Rightarrow f$ admite primitive.
b) Să presupunem prin absurd că f admite primitive. Atunci f are proprietatea lui Darboux (1).
Dacă notăm $g(x)=x^3-3x^2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g\circ f=1_{\mathbb{R}}\Rightarrow f$ este injectivă (2) şi *g* este surjectivă.
Din (1) şi (2) rezultă că f este strict monotonă şi continuă, deci $f(\mathbb{R})$ este interval.
Dacă $f(\mathbb{R})=(a,\infty)$ atunci $(g\circ f)(\mathbb{R})=g((a,\infty))=(b,\infty)\neq\mathbb{R}$ adică $g\circ f$ nu este surjectivă ceea ce este fals! Analizând şi celelalte cazuri posibile deducem că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f este bijectivă.
Atunci $f^{-1}=g\Rightarrow g$ este injectivă, absurd!

Barem.

a) g bijectivă	1 p
$f=g^{-1}\Rightarrow f$ continuă $\Rightarrow f$ admite primitive	1 p
b) f admite primitive $f\Rightarrow$ are proprietatea lui Darboux	1 p
$g\circ f=1_{\mathbb{R}}\Rightarrow f$ este injectivă	1 p
f este strict monotonă şi continuă, deci $f(\mathbb{R})$ este interval	1 p
$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, f este bijectivă	1 p
Finalizare	1 p

4. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă , cu $0\le f'(x)\le 1,\forall x\in[a,b]$ şi $f(a)=0$.

Arătaţi că $3\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^3\ge\int_a^b f^8(x)dx$.

Ion Bursuc

Soluţie.

Considerăm funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}, g(t)=3\left(\int_a^t f^2(x)dx\right)^3-\int_a^t f^8(x)dx$.

Funcţia g este derivabilă şi $g'(t)=9\left(\int_a^t f^2(x)dx\right)^2 f^2(t)-f^8(t)=$

$$=f^2(t)\left(9\left(\int_a^t f^2(x)dx\right)^2-f^6(t)\right)\ge f^2(t)\left(\left(3\int_a^t f^2(x)f'(x)dx\right)^2-f^6(t)\right)=0$$

$\Rightarrow g'(t)\ge 0,\forall t\in[a,b]$, de unde deducem că funcţia g este crescătoare .

Cum $g(a)=0\Rightarrow g(b)\ge g(a)=0$, deci are loc inegalitatea din enunţ.

Barem.

Funcţia g este derivabilă	1 p
Calculează $g'(t)$	2 p
Demonstrează $g'(t)\ge 0,\forall t\in[a,b]$	3 p
Finalizare	1 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.